7/3/17 Μάθημα 2ο

Σχέση Ισοδυναμίας
Πράξεις
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ φυσικοί
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (n, m) \mapsto n+m$
είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο το 0, δεν έχει αντίθετο στοιχείο ο μόνος που έχει είναι το 0.
Όχι Αντίθετος => Όχι ΟΜΑΔΑ.
είναι αντιμεταθετική

• Ορίζουμε R στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
- $(\alpha, b) R (c, d) \Leftrightarrow \alpha + d = c + b$
είναι αυτοπαθής? $\forall (\alpha, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to (a, b) R (a, b) \Leftrightarrow$ (ορισμός)
$\alpha + b = \alpha + b$
- Αν $(a, b) R (c, d) \Rightarrow (c, d) R (\alpha, b) \to \alpha + d = b + c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b + c = \alpha + d$
- Αν $(\alpha, b) R (c, d)$ και $(c, d) R (e, f) \Rightarrow (\alpha, b) R (e, f)$
$\left.\begin{array}{l} \alpha + \cancel{b} = b + \cancel{c} \\ + \cancel{c} + f = d + e \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + f = b + e$

Άρα είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να βρω τις κλάσεις.

$[(0,0)] = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ η κλάση $[(0,0)]$ περιέχει τα ίδια στοιχεία

$(0,0) R (\alpha, b) \Leftrightarrow b = \alpha$.

$[(1,0)] = \{(1+b,\ b) \mid b\in\mathbb{N}\}$

$(1,0)\,R\,(\alpha,b) \Leftrightarrow 1+b=\alpha$

ή

$[(n,0)] = \{(n+b,\ b) \mid b\in\mathbb{N}\}$ n δεδομένο

παρατηρώ δεν έχω το $(0,1)$ άρα

$[(0,1)] = \{(\alpha,\ \alpha+1) \mid \alpha\in\mathbb{N}\}$

$(0,1)\,R\,(\alpha,b) \Leftrightarrow b=\alpha+1$

ή

$[(0,m)] = \{(\alpha,\ \alpha+m) \mid \alpha\in\mathbb{N}\}$, m συγκεκριμένο

Τυχαίο $(\alpha,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

- Αν $\alpha\geq b \Rightarrow \alpha=b+x \Rightarrow (\alpha,b)=(b+x,\ b)$ ανήκει στην κλάση $[(n,0)]$.
- Αν $\alpha<b \Rightarrow b=\alpha+x \Rightarrow (\alpha,\ \alpha+x)$ ανήκει στην κλάση $[(0,m)]$.

Άρα βρήκαμε όλες τις κλάσεις.

Έχουμε τις κλάσεις:

$$\Big\{\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{[(0,0)]},\ \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{[(1,0)]},\ \underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{[(2,0)]},\ \dots\Big\}\ \cup$$

$$\Big\{\underset{\substack{\downarrow\\ -1\\ \parallel\!\vert\\ (x,\ x+1)}}{[(0,1)]},\ \underset{\substack{\downarrow\\ -2}}{[(0,2)]},\ \dots\Big\}$$

$x-(x+1)=-1$ για απείρους φυσικούς x.

Το συνολο $\{[n,0],[0,m] \mid n,m\in\mathbb{N}\}$
θα το συμβολιζουμε με $\mathbb{Z}=\{n,-m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$
Πρεπει ακομα να δειξουμε οτι η γνωστη πράξη της
προσθεσης απο το $\mathbb{N}$ ισχυει και στο νεο συνολο $\mathbb{Z}$.

$$n+n' = \underset{(n+x,x)}{[(n,0)]} + \underset{(n'+y,y)}{[(n',0)]} = [(n+n',0)]$$

Γνωριζω οτι: $(n,0)R(n+x,x)$ $\Rightarrow (n,0)\oplus(n',0)R(n+x,x)\oplus$
$(n',0)R(n'+y,y)$ $(n'+y,y)$

$\Rightarrow (n+n',0)\ R\ (n+x+n'+y,\ x+y)$ ισχύει
Δηλαδη η νεα πράξη δεν εξαρτεται απο τον αντιπροσωπο
της κλασης.

$\mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$
σεβεται την πράξη.

• Το $\mathbb{Z}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα, γιατι:
$\underset{n}{[(n,0)]} \oplus \underset{-n}{[(0,n)]} = [(0,0)]$
$\to [(n,n)] = [(0,0)]$ οποτε αποτελεί ομαδα

• $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad (n,m)\mapsto n\cdot m \quad (\mathbb{N},\cdot)$
προσεταιριστική, μοναδιαίο, δεν έχει αντίστροφο
είναι μονοειδές.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{r}{p} \mid p\neq 0,\ r,p\in\mathbb{Z},\ (r,p)=1\right\}$$

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$ είναι ισοδύναμα ΚΛΔ: $\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{4},\frac{3}{6},\ldots\right\}$

$(\mathbb{N}, +)$ μονοειδές

$\mathbb{Z} = \{ \underset{n}{[(n,0)]}, \underset{-m}{[(0,m)]} \mid n,m \in \mathbb{N} \} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\oplus \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$[(\alpha,\beta)] \oplus [(\gamma,\delta)] = [(\alpha+\gamma, \beta+\delta)]$

$(\mathbb{Z}, \oplus)$ ομάδα

$(\mathbb{N}, \cdot)$ μονοειδές

$\odot \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Δείχνουμε ότι αυτή η πράξη είναι καλά ορισμένη και συμπίπτει με την πράξη που κληρονομείται από το $\mathbb{N}$.

$[(n,0)] \odot [(m,0)] := [(nm, 0)]$

$[(n,0)] \odot [(0,m)] := [(0, nm)]$

$[(0,n)] \odot [(0,m)] := [(nm, 0)]$

Άρα $(\mathbb{Z}, \cdot)$ μονοειδές θέλουμε να γίνει ομάδα.

Ξεκινάμε από το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$(\alpha,\beta) R (\gamma,\delta) \iff \alpha\delta = \beta\gamma$

Αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Να βρούμε τις κλάσεις.

$(\alpha,\beta) R (\kappa\alpha, \kappa\beta) \quad \kappa \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow (\alpha,\beta) R \left(\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}, \frac{\beta}{(\alpha,\beta)} \right)$

ΜΚΔ

Τώρα $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$ και $\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

$(1,2) R (2,4) R (3,6) R \dots$

Όλες οι κλάσεις δίνονται από $[(\alpha,\beta)] = \{ (\kappa\alpha, \kappa\beta) \mid \kappa \in \mathbb{Z}^* \}$ και α, β πρώτοι μεταξύ τους.

· Αν α, β πρώτοι μεταξύ τους και γ, δ πρώτοι μεταξύ τους τότε $[(\alpha,\beta)] \neq [(\gamma,\delta)] \Leftrightarrow$ Άσκηση

→ Αν ήταν στην ίδια κλάση τότε:

$(\alpha,\beta) \, R \, (\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

· Όλες οι κλάσεις δίνονται από $\{[(\alpha,\beta)] \mid \alpha,\beta$ πρώτοι μεταξύ τους και $\beta \in \mathbb{N}^* \}$

↳ δηλ. β πάντα θετικό

$[(-1,2)] \sim (1,-2)$ επιλέγω $[(-1,2)]$

$[(-1,-2)] = [(1,2)]$

Άρα θ.δ.ο ένα τυχαίο (n,m) ανήκει σε κάποια κλάση $\{[(\alpha,\beta)] \mid \alpha,\beta$ πρώτοι μεταξύ τους και $\beta \in \mathbb{N}^*\}$

Αν $m>0 \Rightarrow (n,m) \in \left[\left(\frac{n}{(n,m)}, \frac{m}{(n,m)}\right)\right]$

Αν $m<0 \Rightarrow (n,m) \, R \, (-n,-m) \Rightarrow (n,m) \in \left[\frac{-n}{(n,m)}, \frac{-m}{(n,m)}\right]$

Επομένως το τυχαίο (α,β) θα ανήκει σε κάποια από αυτές τις κλάσεις.

Ξέρουμε ότι $A = \{[(\alpha,\beta)] \mid \alpha,\beta$ πρώτοι και $\beta \in \mathbb{N}^*\}$ $\boxed{\alpha \in \mathbb{Z}}$

$\downarrow$

$\left\{\frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha,\beta \text{ πρώτοι και } \beta \in \mathbb{N}^*\right\} = \mathbb{Q}$

$[(n,1)]$
$\downarrow$
$n = \mathbb{Z}$

Στο A ορίζουμε δύο πράξεις "συμβιβαστές" με τη σχέση ισοδυναμίας οι οποίες "έρχονται" από το $\mathbb{Z}$. (σέβονται)

$\oplus \; A \times A \to A$

$\left([(\alpha,\beta)], [(\gamma,\delta)]\right) \mapsto [(\alpha,\beta)] \oplus [(\gamma,\delta)] = [(\alpha\delta + \beta\gamma, \beta\delta)]$

1) Πρέπει η πράξη να σέβεται την σχέση. Δηλαδή να μην εξαρτάται από τους αντιπροσώπους.
2) Η πράξη αυτή πρέπει να είναι η ίδια όπως και στο $\mathbb{Z}$ για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}$: $[(n,1)] \oplus [(m,1)] =$
$= [(n \cdot 1 + m \cdot 1, 1 \cdot 1)]$